1 K ist das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = 3x^2 - 2x^3$; $x \in \mathbb{R}$.

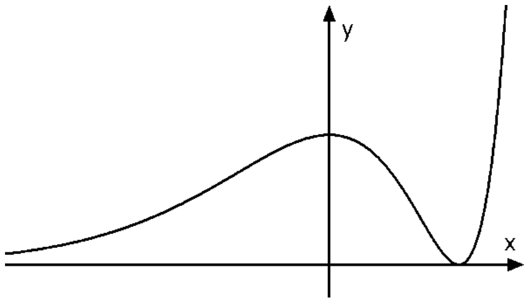
Zeigen Sie: H(1|1) ist Hochpunkt von K.

Skizzieren Sie K.

Das Schaubild K, die Tangente an K im Punkt H und die y-Achse begrenzen eine Fläche im 1. Quadranten. Berechnen Sie deren Inhalt.

2 Eine der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 mit

$$f_1(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$$
$$f_2(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-x}$$
$$f_3(x) = (x-2)^3 \cdot e^x$$
$$f_4(x) = (x+2)^2 \cdot e^x.$$



gehört zu dem skizzierten Schaubild.

Entscheiden Sie, welche das ist, und begründen Sie für jede der drei anderen Funktionen, warum sie nicht zu dem Schaubild gehören kann.

3 Eine periodische Funktion hat die Wertemenge $W = [1;5]$. Zwei benachbarte Wendepunkte haben den Abstand 3. An der Stelle $x = 1$ nimmt die Funktion ihr Maximum an.

Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.

4 Eine Polynomfunktion 3. Grades hat nur die Nullstellen 1 und 3. Das Schaubild dieser Funktion geht durch P(0|3).

Ermitteln Sie den Funktionsterm einer solchen Funktion.

5 Auf dem Arbeitsblatt (Seite 6) ist im oberen Koordinatensystem das Schaubild K_f einer Funktion f dargestellt.
Die Funktion F ist die Stammfunktion von f, die an der Stelle -5 den Wert 0 annimmt.

Zeichnen Sie das Schaubild dieser Stammfunktion in das untere Koordinatensystem auf dem Arbeitsblatt (Seite 6).

Nehmen Sie Stellung zu der folgenden Behauptung: Die Ableitungsfunktion von f hat mindestens zwei Extremstellen.

6 Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = x^3(x-a)$; $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Mit K_a wird das Schaubild von f_a bezeichnet. Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(1) f_a hat für alle a genau zwei Nullstellen.

(2) Der Ursprung ist ein Sattelpunkt von K_a.

(3) K_a hat genau einen Tiefpunkt an der Stelle x_T mit $0 < x_T < a$.

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Mit K wird das Schaubild von f bezeichnet.

Zeigen Sie, dass $H\left(2 \,|\, 4e^{-2}\right)$ ein Hochpunkt von K ist.

Geben Sie den Tiefpunkt von K an und skizzieren Sie K.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$; $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm derjenigen Stammfunktion von f, deren Schaubild einen Tiefpunkt auf der x-Achse hat.

9 Das Schaubild einer Funktion f hat in $H\left(0 \,|\, 2\right)$ einen Hochpunkt und in $T\left(2 \,|\, -4\right)$ einen Tiefpunkt.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f,

(1) wenn f eine Polynomfunktion ist.

(2) wenn f eine trigonometrische Funktion ist.

10 Gegeben ist die Funktion f durch $f\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} + \frac{5}{2}$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K.

Berechnen Sie die Schnittpunkte von K mit der x-Achse.

11 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, geht durch $A\left(2|3\right)$ und schneidet die x-Achse in $N\left(1|0\right)$. Die Tangente in $B\left(3|y_B\right)$ ist parallel zur zweiten Winkelhalbierenden.

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dessen Hilfe sich der Funktionsterm bestimmen lässt.

12 Gegeben ist die Funktion f durch $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^2+3x;\ x\in\mathbb{R}$.

Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Die Punkte $O\left(0|0\right)$, $P\left(u|0\right)$ und $Q\left(u|f\left(u\right)\right)$ bilden ein Dreieck.

Bestimmen Sie u mit $0<u<6$ so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

13 Gegeben ist die Funktion f durch $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+1+e^{-x};\ x\in\mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K.

Bestimmen Sie die Extremstellen von f. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.

Begründen Sie, dass K immer oberhalb der Asymptote verläuft.

Überprüfen Sie, ob der Inhalt der Fläche, die K, die Asymptote, die y-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $x=5$ einschließen, größer als 1 ist.

14 Gegeben ist die Funktion f durch $f\left(x\right)=x^4-5x^2+4;\ x\in\mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

(1) Zeigen Sie: $f\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.
Skizzieren Sie K.

(2) K schließt mit der x-Achse oberhalb der x-Achse eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt.

15 Für $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ ist die Funktion f gegeben durch $f(x)=a\cdot e^{bx}-c;\ x\in\mathbb{R}$.

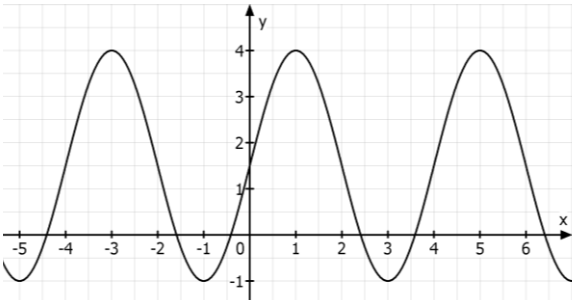
Untersuchen Sie, für welche Werte von a, b und c das Schaubild von f rechtsgekrümmt ist.

16 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x \cdot (x - t) \cdot (x - t^2)$; $x \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die Nullstellen von f_t an.

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

17 Gegeben ist das folgende Schaubild einer trigonometrischen Funktion.



Max behauptet, dass sich dieses Schaubild durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3}{2}$ beschreiben lässt.

Moritz behauptet, dass sich die Funktion g mit $g(x) = -\frac{5}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) + \frac{3}{2}$ eignet.

Begründen Sie für beide Funktionsterme, warum sie sich eignen bzw. nicht eignen.

18 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} + 2x + 3$; $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K und begründen Sie, dass K für $x \in \mathbb{R}$ rechtsgekrümmt ist.

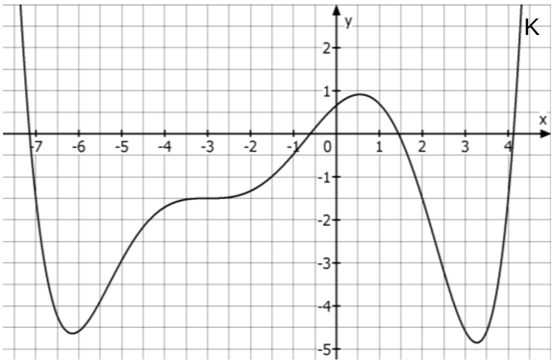
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.

Skizzieren Sie K.

19 Eine Parabel geht durch die Punkte $P(1|-1)$, $Q(-1|5)$ und hat im Punkt P die Steigung -4.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

20 Gegeben ist das folgende Schaubild K einer ganzrationalen Funktion f.



Martin stellt folgende Behauptungen auf:

(1) f ist eine Funktion 4. Grades, da das Schaubild vier gemeinsame Punkte mit der x-Achse hat.

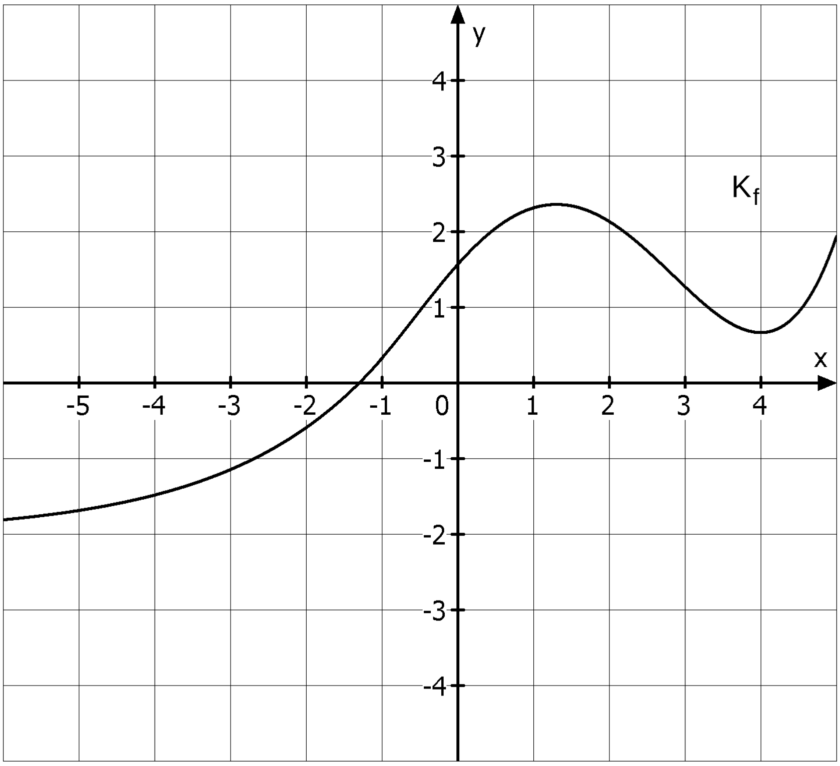
(2) Für $1 \le x \le 3$ ist die erste Ableitung von f monoton fallend.

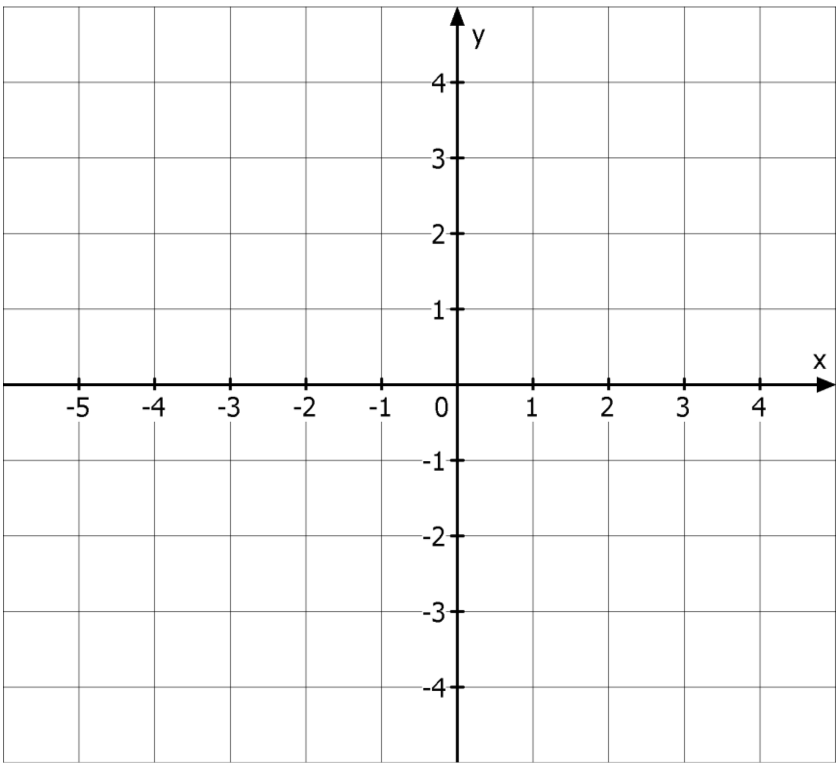
(3) $\int_{-4}^{-2} f(x)dx \approx 3$

(4) Die Fläche, die K im Intervall $[1;4]$ mit der x-Achse einschließt, lässt sich durch $\left|\int_{1}^{4} f(x)dx\right|$ berechnen.

Begründen oder widerlegen Sie Martins Aussagen.

Arbeitsblatt zu Aufgabe 5





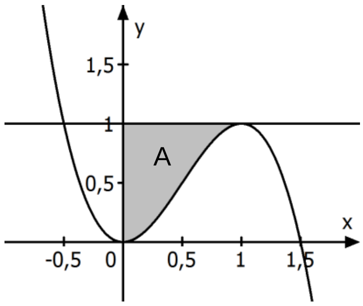
Lösungsvorschlag

1 $h(x) = 3x^2 - 2x^3 = -2x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$; $h'(x) = 6x - 6x^2$; $h''(x) = 6 - 12x$

Aus $h(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 = 1 \ \wedge \ h'(1) = 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 0 \ \wedge \ h''(1) = 6 - 12 \cdot 1 < 0$

folgt: H(1|1) ist Hochpunkt von K.

Skizze:



Inhalt der beschriebenen Fläche:

$$A = \int_0^1 (1 - h(x))\,dx = \int_0^1 \left(1 - \left(3x^2 - 2x^3\right)\right)dx$$

$$= \left[x - x^3 + \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2 Das Schaubild gehört zu einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

(1) f hat eine positive doppelte Nullstelle, denn das Schaubild berührt die x-Achse im positiven Bereich, die Funktionswerte wechseln das Vorzeichen nicht.

(2) Es gilt: $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Beide Eigenschaften hat nur die Funktion f_1, sie gehört also zum Schaubild.

f_2 hat die Eigenschaft (2) nicht, sie zeigt genau das umgekehrte Verhalten.

f_3 hat die Eigenschaft (1) nicht, sie hat eine dreifache positive Nullstelle.

f_4 hat die Eigenschaft (1) nicht, sie hat eine doppelte negative Nullstelle.

3 Für die gesuchte Funktion gilt: $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$ mit $a > 0$.
Die Funktionswerte schwanken zwischen 1 und 5, daher hat die Funktion die Amplitude 2, d. h. $a = 2$.
Da die Mitte des Intervalls bei 3 liegt, ist $d = 3$.
Der Abstand zweier benachbarter Wendepunkte ist eine halbe Periode, also ist die Periode 6 und damit $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
Da ein Hochpunkt der Kurve bei $x = 1$ liegt, gilt für die Verschiebung in x-Richtung: $c = 1$.

Ein passender Funktionsterm ist $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x - 1)\right) + 3$.

Lösungsvorschlag

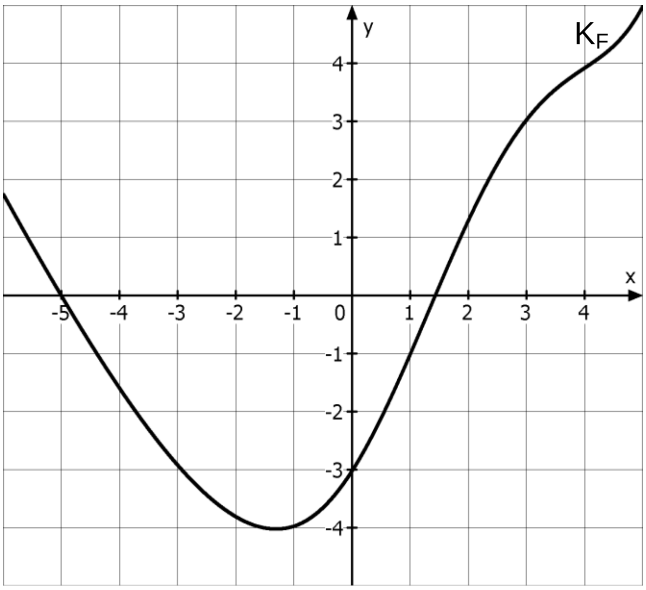
4 Eine der beiden Nullstellen muss eine doppelte Nullstelle sein.

Folglich gilt z. B.: $f(x) = a(x-1)^2(x-3)$

$f(0) = 3 \;\Leftrightarrow\; a(0-1)^2(0-3) = 3 \;\Leftrightarrow\; a = -1$

möglicher Funktionsterm: $f(x) = -(x-1)^2(x-3)$

5

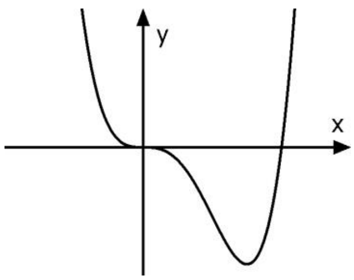


Die Behauptung ist wahr, denn Extremstellen von f' sind Wendestellen von f und das Schaubild von f hat mindestens zwei Wendepunkte (einen Wendepunkt für $-3 < x < 0$ und einen Wendepunkt für $1 < x < 4$).

6 (1) Die einzigen Nullstellen von f_a sind $x_1 = a$ und $x_2 = 0$. Wegen $a \neq 0$ ist $x_1 = a$ eine einfache und $x_2 = 0$ eine dreifache Nullstelle von f_a.

(2) Aufgrund von (1) ist $x = 0$ eine dreifache Nullstelle, also liegt an der Stelle $x = 0$ ein Sattelpunkt vor.

(3) Der Koeffizient von x^4 ist positiv. Mit der dreifachen Nullstelle 0 und der einfachen Nullstelle $a\,(>0)$ ergibt sich für K_a der in der Skizze dargestellte Verlauf.
Anhand der Skizze erkennt man, dass die Behauptung zutrifft.



Lösungsvorschlag

7 $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right) = e^{-x} \cdot x \cdot (2-x)$

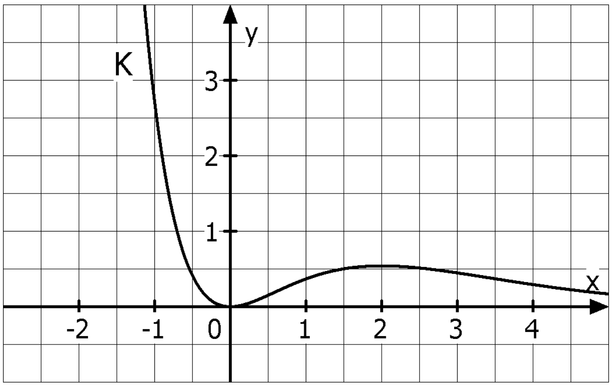
$f'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$

Da beide Stellen einfache Nullstellen sind (also Nullstellen mit Vorzeichenwechsel), sind es Extremstellen von f.

$f(0) = 0;\ f(2) = 4e^{-2} > 0$

Daher ist $H\left(2 \,|\, 4e^{-2}\right)$ der Hochpunkt von K und $T(0\,|\,0)$ der Tiefpunkt.

Skizze:



8 $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + c$

$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

$F''(x) = f'(x) = x + 1$

Mögliche Extremstellen:

$F'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 8\right) = 0 \iff \frac{1}{2}(x+4)(x-2) = 0 \iff x = -4 \vee x = 2$

$F''(-4) = -3 < 0;\ F''(2) = 3 > 0$

Also hat das Schaubild von F einen Tiefpunkt an der Stelle $x = 2$.
Dieser soll auf der x-Achse liegen, d. h. es muss gelten:

$F(2) = 0 \iff \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 0 \iff c = \frac{14}{3}$

Funktionsterm der gesuchten Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{14}{3}$.

Lösungsvorschlag

9 (1) Wegen Hoch- und Tiefpunkt muss der Grad mindestens 3 sein.

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$; Ableitung: $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$H(0|2)$: $f(0) = 2 \Leftrightarrow d = 2$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

$T(2|-4)$: $f(2) = -4 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = -4$

$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 4b + c = 0$

c und d eingesetzt ergibt das LGS: $\left| \begin{array}{r} 8a + 4b = -6 \\ 12a + 4b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 8a + 4b = -6 \\ -4a + \ \ 0 = -6 \end{array} \right|$

Daraus folgt: $a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ und $8 \cdot \frac{3}{2} + 4b = -6 \Leftrightarrow 4b = -6 - 12 \Leftrightarrow b = -\frac{9}{2}$

Eine mögliche Gleichung lautet: $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2$.

(2) Da der Hochpunkt $H(0|2)$ auf der y-Achse liegt, eignet sich eine Kosinusfunktion.

Ansatz: $f(x) = u \cdot \cos(k \cdot x) + c$

Wenn die angegebenen Extrempunkte benachbart sind, ist die Periode 4,

also: $k = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Amplitude: $u = \frac{2 - (-4)}{2} = 3$; Verschiebung in y-Richtung: $c = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$

Damit folgt: $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 1$

10 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{2} = 0$;

Mit der Substitution $z = e^x$ ergibt sich:

$\frac{1}{2}z^2 - 3z + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \pm \sqrt{9-5} \Leftrightarrow z = 5 \vee z = 1$.

Durch Resubstitution erhält man $e^x = 5 \vee e^x = 1$ bzw. $x = \ln(5) \vee x = 0$

und damit $N_1(\ln(5)|0)$ und $N_2(0|0)$.

11 Ansatz: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$; $f'(x) = 4a \cdot x^3 + 2b \cdot x$

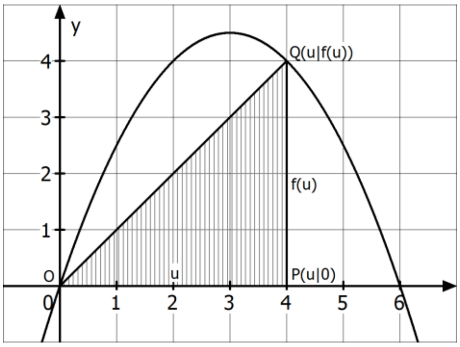
Es muss gelten: $f(2) = 3 \wedge f(1) = 0 \wedge f'(3) = -1$

Daraus ergibt sich $16a + 4b + c = 3 \wedge a + b + c = 0 \wedge 108a + 6b = -1$.

Lösungsvorschlag

12 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x = -\frac{1}{2}x(x-6)$

Skizze:



$A(u) = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = \frac{1}{2}u\left(-\frac{1}{2}u^2 + 3u\right) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u^2$

$A'(u) = -\frac{3}{4}u^2 + 3u$; $A''(u) = -\frac{3}{2}u + 3$

Bedingung für extremalen Flächeninhalt:

$A'(u) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 + 3u = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u(u-4) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 4$

$A''(4) = -3 < 0$

Für $u \to 0$ bzw. $u \to 6$ gilt $A(u) \to 0$. Damit ergibt sich der maximale Flächeninhalt für $u = 4$.

13 $f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x}$; $f''(x) = e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -x \Leftrightarrow x = \ln(2)$

$f''(\ln(2)) = e^{-\ln(2)} > 0$

$x = \ln(2)$ ist Extremstelle von f.

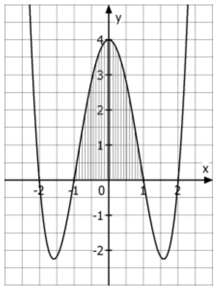
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$ ist schiefe Asymptote für x gegen $+\infty$.

Wegen $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ liegt K oberhalb der Asymptote.

$A = \int_0^5 \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right)dx = \int_0^5 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^5 = -e^{-5} + 1 < 1$, da e^{-5} immer positiv ist.

14 (1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Schaubildskizze von f:



b) $A = 2 \cdot \int_0^1 f(x)dx = 2 \cdot \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 - 0\right)$

$= 2 \cdot \left(\frac{3}{15} - \frac{25}{15} + \frac{60}{15}\right) = \frac{76}{15}$

Lösungsvorschlag

15 $f'(x) = a \cdot b \cdot e^{bx}$, $f''(x) = a \cdot \underbrace{b^2 \cdot e^{bx}}_{>0}$

Für $a > 0$ ist $f''(x) > 0$ und für $a < 0$ ist $f''(x) < 0$.
Also muss $a < 0$ sein, damit das Schaubild von f rechtsgekrümmt ist;
b und c spielen dabei keine Rolle.

16 Nullstellen: $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = 0$

Anzahl der Nullstellen:

$t = 0$: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ also eine Nullstelle
$t = 1$: $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = 0$ also zwei Nullstellen
In allen anderen Fällen gibt es drei Nullstellen.

17 Das Schaubild hat die Amplitude $\frac{4-(-1)}{2} = \frac{5}{2}$ und die Periode 4, d. h. der Faktor vor dem x in der Klammer ist $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Außerdem ist das Schaubild um $\frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$ nach oben verschoben. Dies trifft auf beide Funktionsterme zu.

Max schlägt eine Sinuskurve vor, die in x-Richtung nicht verschoben wurde, d. h. auf der y-Achse liegt ein Wendepunkt mit positiver Steigung. Da dies auf das Schaubild zutrifft, passt die Funktion f.

Moritz schlägt eine Kosinuskurve vor, die an der x-Achse gespiegelt und um eine Einheit nach links verschoben wurde. Dies trifft für das Schaubild ebenfalls zu, so dass auch die Funktion g zu dem Schaubild passt.

18 $f'(x) = -2e^{4x} + 2$; $f''(x) = -8e^{4x}$

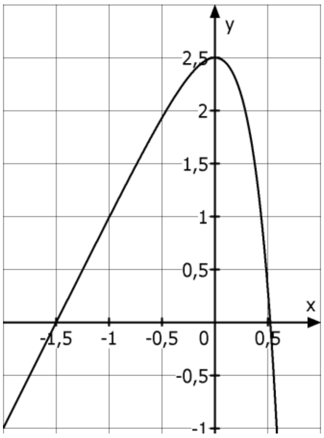
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{4x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$
$f''(0) = -8 < 0$
$f(0) = \frac{5}{2}$

Also ist $H(0 \mid 2{,}5)$ Hochpunkt.

Da die zweite Ableitung unabhängig von x immer negativ ist, ist K für $x \in \mathbb{R}$ rechtsgekrümmt.

Asymptote: $y = 2x + 3$

Skizze von f:



Lösungsvorschlag

19 Ansatz: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$; $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Es muss gelten: $f(1) = -1 \;\wedge\; f(-1) = 5 \;\wedge\; f'(1) = -4$

Daraus ergibt sich: $a + b + c = -1 \;\wedge\; a - b + c = 5 \;\wedge\; -2a + b = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Damit ergeben sich: $b = -3 \;\wedge\; c = \frac{5}{2} \;\wedge\; a = -\frac{1}{2}$

bzw. die Parabelgleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

20 (1) Das vorliegende Schaubild besitzt aber auch vier Wendepunkte. Dies ist bei einer Funktion 4. Grades nicht möglich, da die zweite Ableitung vom Grad zwei ist und somit maximal zwei Lösungen besitzen kann. Daher ist diese Aussage falsch.

(2) Die Steigung nimmt zunächst ab, steigt aber (nach dem Wendepunkt) wieder und damit ist die Aussage falsch.

(3) Die Fläche, die die Kurve mit der x-Achse im Intervall $[-4; -2]$ einschließt, liegt unter der x-Achse, daher führt das angegebene Integral auf einen negativen Wert und somit ist die Aussage falsch.

(4) Diese Aussage ist ebenfalls falsch, da die Fläche teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse liegt.